МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
из АНАЛИЗЕ С АЛГЕБРОМ

УМЕТНОСТ КОМБИНАТОРНОГ ДОКАЗА

Ученик	**Ментор**
Предраг Јекић, IVд	Др Соња Чукић

Београд, јун 2015.

САДРЖАЈ

1 УВОД

Бројање и пребројавање део су нашег свакодневног живота. Као разумна људска бића, научени смо да се бавимо разним пребројавањима већ у раном узрасту. Било да се ради о бројању од један до десет, док смо још у пеленама, било да учимо да сабирамо једноцифрене бројеве у предшколском узрасту или пак таблицу множења у другом разреду основне школе, увек се вратимо једном истом појму: *броју*.

Дисциплина математике, која се бави појмом пребројавања и сродним појмовима јесте *комбинаторика*. Комбинаторика је грана математике која задире у многе друге области математике, па је због тога тешко дати њену прецизну дефиницију. Једна од дефиниција комбинаторике каже да она *проучава распоређивања елемената у скуповима*. У овој математичкој дисциплини се проучавају дискретни скупови, тј. скупови састављени од одвојених, изолованих елемената. У највећем броју случајева ти скупови су коначни, али се неретко проучавају и скупови са бесконачно много елемената, посебно када је добро позната структура тих скупова.

Корени комбинаторике досежу у далеку прошлост. Џаинистички[1] текст *Багавати Сутра* (*the Bhagavati Sutra*, енгл.) први је текст у којем се спомиње неки комбинаторни проблем. Написан је око 300 година пре Христа, а састојао се из питања: „На колико начина неко може испробати шест укуса, ако је у могућности да истовремено испробава један, два или три укуса?“. Математика је временом довољно напредовала, да је ово у данашње време једно од основних израчунавања при изучавању комбинаторике.

Европљани су се са комбинаториком упознали тек у XIII веку, а за то су заслужни математичари Леонардо од Пизе (1170-1250), познатији под надимком *Фибоначи* и Јордан де Немор (средина XIII века). Фибоначи је у својим књигама и текстовима представио арапске и индијске идеје европском друштву, укључујући и чувене *Фибоначијеве бројеве*[2]. Де Немор је први европски математичар који је *биномне коефицијенте* распоредио у троугао. Ово је нешто раније већ било примећено на Средњем и Далеком истоку. Данас се овај троугао назива Паскалов[3].

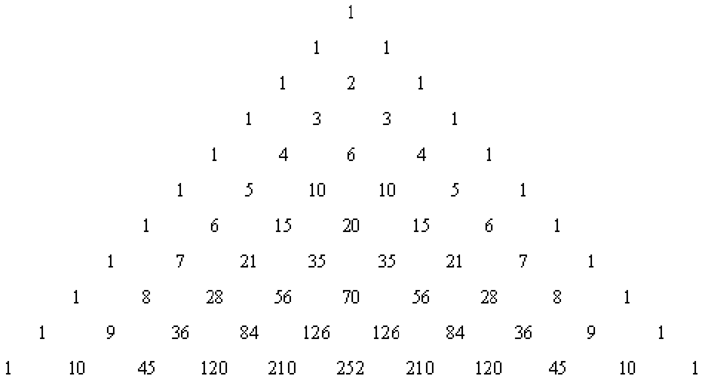
---

[1] Џаинизам је, уз хиндуизам и сикитизам, једна од три највеће индијске религије

[2] Фибоначијеви бројеви представљају низ бројева у којем збир претходна два члана низа даје вредност следећег члана низа. За почетне вредности узима се $f_0 = 1$ и $f_1 = 1$

[3] Б. Паскал (*Blaise Pascal*) – француски математичар, 1623-1662

Слика 1. Фибоначи



Слика 2. Паскалов троугао

Математичари Паскал и Лајбниц[4] допринели су комбинаторици својим радом на формалним доказима комбинаторних проблема као и њиховим довођењем у везу са теоријом вероватноће. Управо због тога су прозвани оснивачима *модерне комбинаторике*.

До данашњих дана, комбинаторици су допринели многи европски умови. Наведимо најважније:

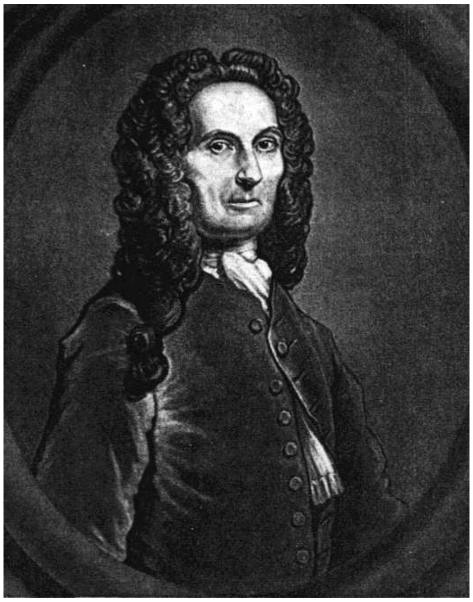
- Абрахам де Муавр – француски математичар, нашао апроксимацију биномних коефицијената, пронашао полиномијални развој;
- Леонард Ојлер – швајцарски математичар, бавио се комбинаторним проблемима у теорији вероватноће;
- Николас Бернули – швајцарски математичар, проналазач функција генератриса.

Слика 3. Блез Паскал

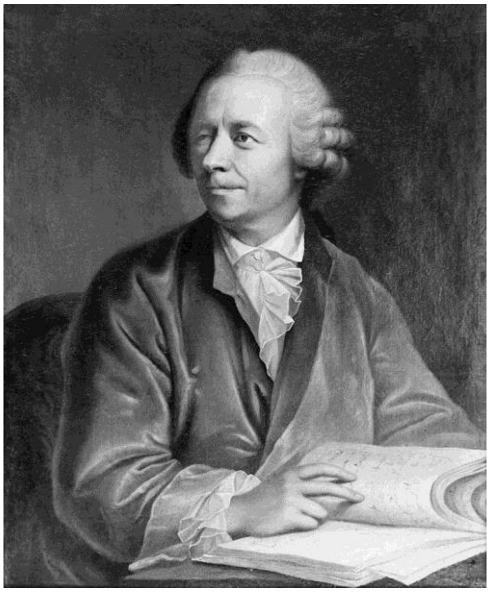
Слика 4. Готфрид Вилхелм Лајбниц

---

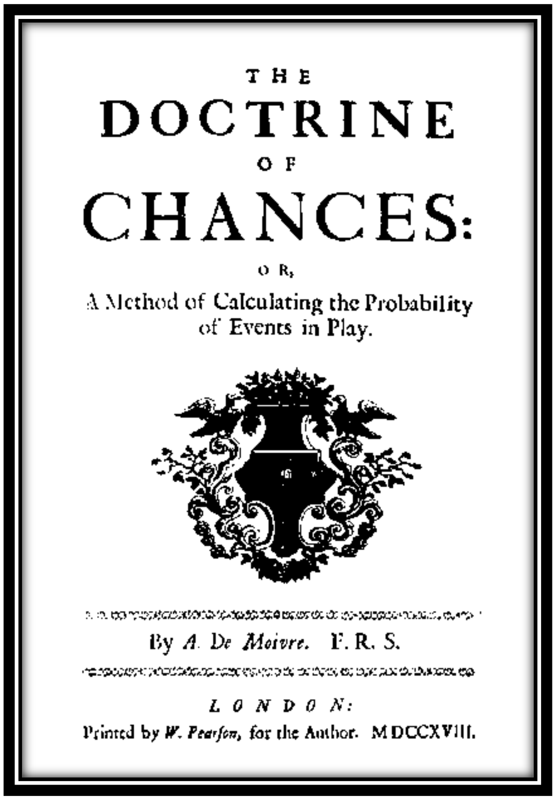
[4] Г. В. Лајбниц (*Gottfried Wilhelm Leibniz*) – немачки математичар, филозоф, историчар, дипломата и политички саветник, 1646-1716



Слика 5. Абрахам де Муавр



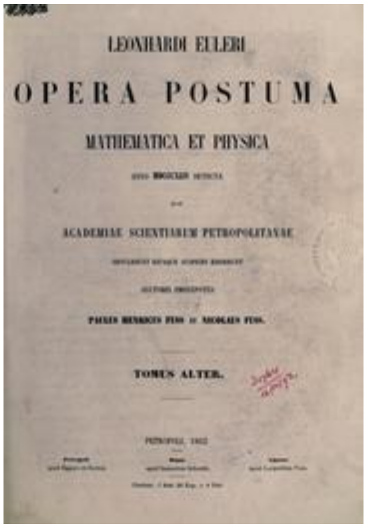
Слика 6. Леонард Ојлер



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability
of Events in Play.

By *A. De Moivre.* F. R. S.

LONDON:
Printed by *W. Pearson,* for the Author. MDCCXVIII.

Слика 7. Доктрина среће, Муавр

LEONHARDI EULERI
OPERA POSTUMA
MATHEMATICA ET PHYSICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM PETROPOLITANAE

TOMUS ALTER.

PETROPOLI 1862

Слика 8. Opera Postuma, сабрана Ојлерова дела

2 ЗАШТО И ШТА ПРЕБРОЈАВАТИ?

Идеја овог рада је да покаже да се неки математички проблеми не морају решавати строго формалним доказима, већ да постоји финији пут којим можемо стићи до жељеног одредишта. Сви докази у овом раду биће сведени на класично пребројавање, тј. пребројавање на два различита начина. Овако коришћен метод пребројавања водиће нас до лепог, често једноставног, али веома конкретног доказа.

Реч „*уметност*" у наслову рада представља управо лепоту коју ови докази носе са собом, а шта је основна сврха уметности до да служи лепом.

У поглављима која следе, биће обрађено више тема, које неће обавезно бити у директној вези једне са другима, али ће свако од решења задатих проблема бити својствен допринос елегантном доказивању у комбинаторици.

Узимам за пример неки од идентитета у комбинаторици. Докази ће се састојати из следећих корака:

- Формирамо питање које је еквивалентно једнакости (идентитету) коју треба доказати.
- Решењу приступамо из два угла, један одговор је лева страна идентитета, други одговор је десна страна идентитета.
- Закључак: пошто су оба одговора решила исти проблем пребројавања, они морају бити једнаки.

Илуструјмо овај поступак на примерима.

Пример 2.1. Доказати идентитет: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \, , n\epsilon N.$

Да бисмо приступили решавању овог проблема, потребно је да се упознамо са двема дефиницијама.

Дефиниција. Факторијел природног броја n је производ свих природних бројева који су мањи или једнаки броју n, у ознаци $n!$.

Другим речима, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Дефиниција. Биномни коефицијент природних бројева n и k, у ознаци $\binom{n}{k}$, рачуна се по формули: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ за $n \geq k$, односно $\binom{n}{k} = \ 0$ за $n < k$.

У комбинаторном смислу, претходни израз представља број начина на који се из скупа који садржи n елемената може изабрати подскуп од тачно k елемената.

Вратимо се решавању проблема. Посматрајмо следећу ситуацију. Одељењу од n ученика речено је да оснују вршњачки тим од произвољно много ученика.

Ако је вршњачки тим формиран од „0 ученика“, то се могло извршити на $\binom{n}{0}$ начина, ако је тим формиран од једног ученика, то се могло извршити на $\binom{n}{1}$ начин итд. Коначно, ако је тим формиран од k ученика ($n \geq k$), то се могло извршити на $\binom{n}{k}$ начина. Дакле, укупан број начина на које се може извршити селекција чланова вршњачког тима, где је број изабраних ученика произвољан представља суму:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .$$

Гледано са друге стране, како год вршили селекцију ученика, за сваког од њих постоје две могућности које су нам на располагању, тј. сваки ученик може бити изабран или неизабран, па због чињенице да их је укупно n, добијамо да је могуће оформити:

2^n различитих тимова.

Пошто смо добили два различита решења једног проблема, логички се закључује да су она једнака, па стога и да је почетни израз тачан за произвољан природан број n. ■

Пример 2.2. Доказати да за сваки природан број n важи: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, k \in N,$ $k < n.$

Аналогно претходном примеру, посматраћемо одељење од n ученика, којем је овог пута речено да формирају делегацију од тачно k ученика.

Лева страна једнакости представља број начина на који се делегација ученика може изабрати.

Посматрајмо сада једног конкретног ученика. Назовимо га ученик А. У случају да ученик А није изабран као члан делегације, остаје нам $n-1$ ученик од којих треба изабрати k и то можемо учинити на $\binom{n-1}{k}$ начина. Ако је пак ученик А изабран као део делегације, остаје нам $n-1$ ученик и $k-1$ слободно место у тиму. Оваква селекција се може извршити на $\binom{n-1}{k-1}$ начина. Како смо покрили све случајеве, можемо да тврдимо да је укупан број начина да се изабере оваква делегација једнак

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Овим је и доказ завршен. ■

3 ФИБОНАЧИЈЕВИ ИДЕНТИТЕТИ

Идентитети из овог поглавља у директној су вези са Фибоначијевим бројевима које смо споменули у уводном поглављу.

Дефиниција. Низ бројева задатих рекурентном формулом $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ и за чије почетне чланове важи $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$, зову се *Фибоначијеви бројеви*.

3.1 Комбинаторна интерпретација

Особине Фибоначијевих бројева присутне су код многих других низова. Погледајмо следећи пример.

Пример 3.1. Нека је (f_n) низ бројева у којем n-ти члан представља број начина записивања броја n у облику збира јединица и/или двојки, при чему је важан редослед сабирака.

Тако за $n = 5$, добијамо $f_5 = 8$ и то је лако показати: 1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1.

Да бисмо детаљно испитали понашање n-тог члана низа, као и његову зависност од претходних чланова низа, довољно је да дискутујемо по првом сабирку у изразу. Нека је f_n члан који посматрамо. Ако је први члан у „развоју броја n" јединица, збир сабирака у остатку израза је $n - 1$, па можемо тврдити да је број начина представљања броја n у облику збира јединица и двојки тако да је први члан јединица исти као и број различитих представљања броја $n - 1$. Ако је, пак, први члан у „развоју броја n" двојка, може се рећи да је број начина оваквог представљања броја n исти као и број различитих представљања броја $n - 2$. Како смо покрили оба случаја, то се коначно може извести израз за n-ти члан низа, који гласи:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Вредности ових низова се могу објаснити и као „број начина да се табле 1 x n поплоча квадратима 1 x 1 и доминама 1 x 2". Следећа теорема, чији је већи део доказа дат изнад, говори о вези између Фибоначејог и овог низа.

ТЕОРЕМА 1. Нека је (f_n) претходно дефинисан низ, а (F_n) Фибоначијев низ. Тада за свако $n \epsilon N$ важи $f_n = F_{n+1}$.

3.2 Идентитети

У већини следећих примера, моћи ћемо да посматрамо оба претходно дефинисана низа. Пошто ћемо се концентрисати на проблем поплочавања, биће нам згодније да идентитете доказујемо користећи особине тзв. „коригованог Фибоначијевог низа“.

Пример 3.2. Доказати да важи: $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1, \forall n \in N_0$.

Проблем се своди на следеће питање: „На колико начина је могуће поплочати таблу 1 x $(n + 2)$ тако да се искористи бар једна домина?“ .

Са једне стране, f_{n+2} је број начина поплочавање дате табле. Искључивањем могућности поплочавања табле само квадратима, добијамо укупно $f_{n+2} - 1$ начина.

Са друге стране, нека i представља позицију прве ћелије последње домине на табли, гледано слева на десно. Знајући вредност броја i, знамо и да се после последње домине на табли налазе само квадрати. Коначно, може се закључити да различитих поплочавања табле са последњом домином на i-тој позицији има укупно f_{i-1}. Знамо да i узима вредности од 1 до $n + 1$, па сума $\sum_{i=1}^{n+1} f_{i-1}$ даје одговор на постављено питање.

Логички закључујемо да су сада добијени изрази једнаки, па је доказ овим завршен. ■

Пример 3.3. За $n \geq 0$ доказати да важи: $f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1}$.

Проблем је еквивалентан питању: „На колико начина је могуће поплочати таблу 1x$(2n + 1)$?“

По дефиницији, први одговор на постављено питање је управо f_{2n+1}.

Број $2n + 1$ је непаран, што нам говори да се на датој табли налази бар један квадрат. Аналогно претходном примеру, нека је i позиција последњег квадрата на табли. То нам говори да се после тог квадрата на табли налазе само домине. Дакле, табли код којих се последњи квадрат налази на i-тој позицији има f_{i-1}. Како i може узети непарне вредности од 1 до $2n + 1$ (јер за домине мора остати паран број места) то је други одговор на постављено питање управо сума $\sum_{i=1 \text{ непарно}}^{2n+1} f_{i-1}$. ■

Пример 3.4. Доказати да важи идентитет: $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+2},\ n \in N_0$.

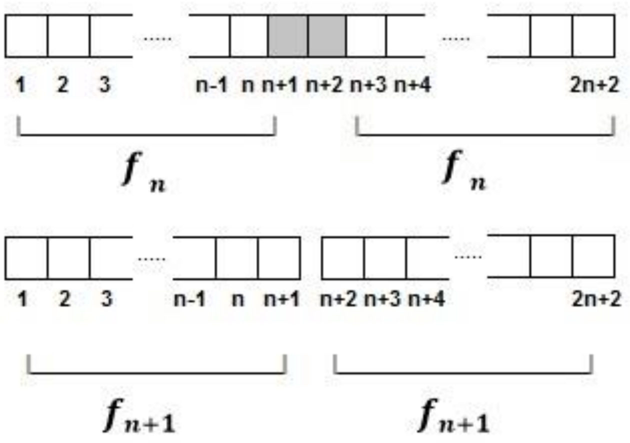
Еквивалентно питање: „На колико се начина може поплочати табла величине 1x$(2n + 2)$?“.

По дефиницији добијамо први одговор на постављено питање, односно f_{2n+2}.

Посматрајмо ову таблу као две спојене табле величина 1x$(n+1)$. Имамо два случаја за разматрање.

Ако постоји домина чија се једна јединична плочица налази на првој половини табле, а друга на другој половини табле, то значи да нам остају два дисјунктна дела табле величина 1xn, а они се могу поплочати на f_n^2 начина (*Слика 9*).

Други случај је случај када се на „средини“ првобитне табле не налази домина. Тада је могуће поделити таблу на две једнаке табле величина 1x$(n+1)$ које се независно могу поплочавати. Поплочавање сваке од табли могуће је, по дефиницији, извршити на f_{n+1} начина, односно, поплочавање обе табле, може се обавити на f_{n+1}^2 начина. Сабирањем вредности које смо добили за ова два случаја дају нам коначно решење: $f_n^2 + f_{n+1}^2$. ■



Слика 9. Илустрација *Примера 3.4*

Пример 3.5. $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1},\ m, n \in N_0$. Доказати.

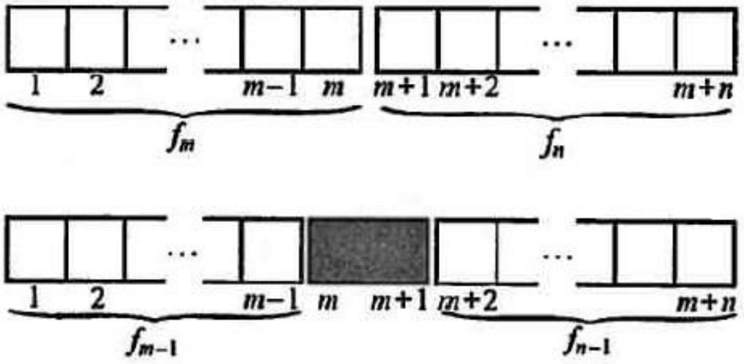
Овај проблем није ништа друго до уопштење тврђења из *Примера 3.4*. Еквивалентно питање за овај проблем је: „На колико начина се може поплочати табла димензија 1x$(m+n)$?“.

По дефиницији, први одговор на ово питање је f_{m+n}.

Други одговор у себи садржи дискусију по „ломљивости табле на m-том месту“. На *Слици 10* дат је графички приказ другог одговора.

Ако се табла може поделити на две табле, димензија 1xm и 1xn, без ломљења делова табле, то значи да имамо два дисјунктна дела табле које можемо независно да разматрамо. Први део (дужине m) можемо да поплочамо на f_m начина, а други (дужине n) на f_n начина. Укупно, целу таблу у овом случају могуће је поплочати на $f_m f_n$ начина.

Ако постоји домина постављена тако да једна њена јединична плочица припада првом делу табле (делу са m плочица), а друга припада делу са n плочица, могуће је одвојити два дела табле и посматрати их независно: први део чине првих $m-1$ ћелија, које се могу поплочати на f_{m-1} начина, а други део чине последњих $n-1$ ћелија, које се могу поплочати на f_{n-1} начина. Ово нам у другом случају даје укупно $f_{m-1}f_{n-1}$ начина, па сабирањем са првим случајем добијамо да је поплочавање табле $1x(m+n)$ могуће извршити на $f_m f_n + f_{m-1}f_{n-1}$ начина.



Слика 10. Дискусија „по ломљивости табле“

Овим је доказ завршен. ■

Пример 3.6. Доказати идентитет: $f_{2n-1} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}f_{i-1}, n \in N$.

Са једне стране, на f_{2n-1} начина се може поплочати табла димензија 1x$(2n-1)$.

Приметимо да је за поплочавање табле ових димензија потребно најмање n делова, а пошто се табла састоји из непарног броја ћелија, то ћемо при поплочавању морати да искористимо најмање један квадрат. Посматрајмо првих n делова на табли. На $\binom{n}{i}$ начина можемо изабрати да тачно i делова буду квадрати. На овај начин, међу првих n делова, остаје нам $n-i$ домина, које заузимају $2n-2i$ ћелија табле. Коначно, на овај начин смо заузели $2n-i$ ћелија, те нам остаје да поплочамо још $i-1$ ћелију. По дефиницији, то можемо учинити на f_{i-1} начина. Дакле сума $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}f_{i-1}$ представља други одговор на постављено питање. ■

3.3 Другачије технике доказивања

Последњим примерима из овог поглавља приступићемо новим методама, мотивисани да испитамо неке друге стране комбинаторних доказа.

У примеру који следи ћемо формирати два скупа при чему ће се од нас тражити да број елемената једног скупа буде x пута мањи од броја елемената другог скупа. Даље ће нам бити задатак да сваком од елемената првог скупа доделимо **тачно** x елемената из другог скупа. Ако покажемо да су сви елементи ових скупова искоришћени тачно једанпут, доказ ће бити завршен.

Пример 3.7. Доказати да за $n \geq 2$ важи: $2f_n = f_{n+1} + f_{n-2}$.

Први скуп је скуп начина да се поплоча табла 1xn. Број елемената овог скупа је f_n.

Други скуп представља сва поплочавања табле 1x$(n+1)$ или табле 1x$(n-2)$. Број елемената овог скупа је $f_{n+1} + f_{n-2}$.

Покажимо да први скуп има два пута мање елемената од другог скупа, тј. да се сваком од елемената првог скупа могу доделити тачно два елемента из другог скупа, под условом да се сви елементи искористе тачно једном.

Елементе комбинујемо на следећи начин. Посматрајмо произвољно поплочану таблу димензија 1xn. Нека је то табла T. Додељујемо јој таблу 1x$(n+1)$, поплочану тако што се првих n ћелија подударају са првих n ћелија табле T, а на последњем месту је постављен квадрат. Друга табла се додељује у зависности од последње постављеног дела табле T. Дакле, ако је последњи део на табли T квадрат, одузимамо јој тај квадрат и постављамо домину (на овај начин добијамо таблу димензија 1x$(n+1)$). Ако је, пак, последњи део на табли домина, једноставно склањамо ту домину (на овај начин добијамо таблу димензија 1x$(n-2)$).

Уверимо се да смо искористили све елементе из оба скупа, и да смо сваки елемент искористили тачно једном. Кренимо у супротном смеру посматрајући поплочавања димензија 1x$(n+1)$ и 1x$(n-2)$.

Почнимо са поплочаним таблама 1x$(n+1)$. Ако је последњи део табле квадрат, његовим уклањањем добијамо одговарајућу таблу $1xn$. Ако је, пак, последњи део домина, уклањањем домине и постављањем квадрата на њено место, опет добијамо жељену поплочану таблу. Посматрајмо сада све табле димензија 1x$(n-2)$. Једноставним додавањем домине на крај оваквих табли, добијамо нове табле 1xn.

Коначно се да закључити да смо овим поступком заиста добили обрнут алгоритам од оног од ког смо пошли, што значи да смо показали да први скуп има два пута мање елемената од другог скупа. ■

Причу о Фибоначијевим идентитетима заокружујемо проблемом којем ћемо приступити из једног новог угла. Уз поплочавања табли посматраћемо низове нула и јединица, при чему захтевамо да се свака јединица понаша попут квадрата на табли, док ће домине заменити пар нула-јединица (01, овим редом). На овај начин, остајемо ограничени двама правилима:

1. У оваквом низу цифара се никада неће појавити суседне нуле,
2. Сваки низ се завршава јединицом.

Ако се деси да се низ завршава нулом, а дужине је n, то ће представљати поплочавање табле димензија $1x(n-1)$. У општем случају, ако се у низу појаве две суседне нуле, бришемо целу секвенцу којој суседне нуле претходе. Дакле, еквивалентни ће бити случајеви:

1101$\underline{00}$101 и **1101**

Погледајмо пример.

Пример 3.8. $f_n + f_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} f_k \cdot 2^{n-2-k} = 2^n$, $\forall n \in N_0$. Доказати.

У запису бинарних бројева се користе само нуле и јединице, па за свако од n места имамо по две могућности. То значи да постоји 2^n различитих бинарних секвенци дужине n. Докажимо да и друга страна једнакости одређује број свих бинарних секвенци дужине n.

Посматрајмо произвољну комбинацију нула и јединица дужине n која репрезентује таблу димензија 1xk. Ово значи да се на $k+1$-вом и $k+2$-ом месту налазе суседне нуле, да је то њихово прво појављивање и да остатак бинарног записа одбацујемо. Дакле, посматрана комбинација нула и јединица је облика

$$\overline{A_1 A_2 \dots A_k 00 B_{k+2} B_{k+3} \dots B_n},$$

где су првих k цифара заправо плочице којима поплочавамо таблу, а остатак произвољна бинарна секвенца коју не разматрамо због присуства суседних нула.

Комбинације у којима се суседне нуле не појављују ($k = n$) посматрамо као проблем поплочавања табле $1xn$, а то се може извршити на f_n начина.

Комбинације за које је $k = n - 1$ (секвенца се завршава нулом), бројимо као сва поплочавања табле димензија 1x$(n-1)$, а таквих поплочавања има f_{n-1}.

Коначно, за $0 \leq k \leq n-2$, први део табле се поплочава на f_k начина, док се у одбаченом делу може појавити 2^{n-2-k} различитих секвенци, па укупно добијамо суму $\sum_{k=0}^{n-2} f_k \cdot 2^{n-2-k}$.

Покривши све случајеве остаје нам још само да их саберемо. Заиста добија се лева страна једнакости, те је други одговор на постављено питање:

$$f_n + f_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} f_k \cdot 2^{n-2-k}.$$

Овим је доказ завршен. ■

4 БИНОМНИ ОРНАМЕНТИ

Са биномним коефицијентима смо се већ сусретали у претходним поглављима. Ипак, прича о њима се никако не завршава ту. Бројни су докази идентитета у вези са биномним коефицијентима који показују како математички доказ може бити елегантан и фин, а опет прецизан и јасан. Управо је то разлог због ког ово поглавље носи атрибут „орнамента[5]“.

4.1 Веза са комбинаториком

Као што је већ речено, биномни коефицијент са параметрима n и k је израз $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, у ознаци $\binom{n}{k}$.

Комбинаторно, $\binom{n}{k}$ означава број k-точланих подскупова скупа од n елемената и то се лако доказује.

4.2 Елементарни идентитети

Пре него што кренемо са озбиљнијим примерима, погледајмо неке основне идентитете.

Пример 4.1. За свако $n \geq k \geq 0$ доказати да важи: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Овај проблем се своди на одређивање броја начина на који се у одељењу од n ученика може оформити делегација од k ученика, а потом и вођа те делегације.

Са једна стране, на $\binom{n}{k}$ начина можемо изабрати делегацију од k ученика, а потом на k начина изабрати њиховог вођу. Укупно: $k\binom{n}{k}$ начина.

Са друге стране, на n начина бирамо првог члана делегације који ће уједно бити и вођа. Потом, од преосталих $n-1$ ученика, на $\binom{n-1}{k-1}$ начина бирамо $k-1$ чланова. Укупно $n\binom{n-1}{k-1}$ начина.

Овим је доказ завршен. ■

---

[5] Орнамент (лат.) – чисто декоративни елемент у ликовној уметности, вајарству, архитектури итд.

Пример 4.2. /*Вандермондов*[6] *идентитет*/ $\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$, $\forall m, n \geq k \geq 0$. Доказати.

Замислимо кутију садржи m црвених и n плавих куглица, а задатак нам је да на произвољан начин извучемо k куглица. Питање је: „Колико начина за извођење овог експеримента постоје?“

По дефиницији, први одговор је $\binom{m+n}{k}$.

Са друге стране, k куглица може бити извучено тако што се прво одабере i црвених куглица, а потом $k - i$ плавих куглица. Сумирањем по i, које се креће од 0 до k, добијамо десну страну једнакости $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$. ■

Пример 4.3. Доказати да за свако $n \geq k \geq x \geq 0$ важи $\binom{n}{k}\binom{k}{x} = \binom{n}{x}\binom{n-x}{k-x}$.

Лева страна једнакости представља број начина да се од n-точланог скупа оформи k-точлани подскуп А, и да се од елемената скупа А оформи x-точлани скуп.

Десна страна представља број начина да се из n-точланог скупа изабере x елемената који ће припадати претходно споменутом под-подскупу, а потом да се од преосталих елемената изабере $k - x$ чланова који ће припадати скупу А, али не и скупу формираном од елемената скупа А.

Ова два приступа су еквивалентна, па је доказ овде завршен. ■

4.3 Неки сложенији идентитети

У наредним примерима, претежно ћемо се бавити пребројавањем подскупова одређених скупова.

Пример 4.4. Доказати да за свако $n \geq k \geq 0$, важи $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Колико $(k+1)$-очланих подскупова има скуп $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$?

По дефиницији, први одговор је $\binom{n+1}{k+1}$. Други одговор добијамо дискусијом по највећем елементу подскупа. Ако знамо да је $i + 1$ највећи елемент подскупа, јасно је да осталих k елемената тог скупа можемо изабрати на $\binom{i}{k}$ начина.

---

[6] А. Т. Вандермонд (*Alexandre Théophile Vandermonde*) – француски математичар, хемичар и музичар (18. век)

Како $i + 1$ може узети вредности од $k + 1$ до $n + 1$, то је сума $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$ друго решење проблема. ■

Пример 4.5. Доказати да важи: $\sum_{i=k}^{n-k}\binom{i}{k}\binom{n-i}{k} = \binom{n+1}{2k+1}, \frac{n}{2} \geq k \geq 0.$

Задатак је еквивалентан проблему: „Колико подскупова са $(2k + 1)$ чланова има скуп $\{1, 2, 3, \dots, n, n + 1\}$?“

Први одговор је, по дефиницији, $\binom{n+1}{2k+1}$.

Водимо се сличном логиком као у претходном примеру, само што овог пута посматрамо „средњи елемент“ у подскупу. Наиме, пошто сваки подскуп има $2k + 1$ елемената, представник сваког подскупа биће $(k + 1)$-ви члан по величини, тј. онај члан од ког постоји k елемената већих и исто толико мањих. Јасно је да, да би се ово испунило, мора бити испуњено: $k + 1 \leq x \leq n - k - 1$, где је x бројна вредност „средњег елемента“. Остале елементе подскупа бирамо на $\binom{x-1}{k}\binom{n-x+1}{k}$, тј. бирамо k елемената мањих од x и k елемената већих од x. Увођењем смене $i = x - 1$ и сумирањем по i добијамо други одговор: $\sum_{i=k}^{n-k}\binom{i}{k}\binom{n-i}{k}$. ■

Пример 4.6. Доказати да важи: $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$, $\forall n \in N_0$.

Посматрајмо скуп $\mathrm{S} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n\}$. Десна страна једнакости је број подскупова од n елемената скупа S.

На левој страни једнакости дешава се исто пребројавање. Разлика је у томе што нам бројач i служи као податак о томе колико позитивних бројева бирамо у подскупу, па на $\binom{n}{i}$ начина бирамо тих i позитивних бројева, а потом на $\binom{n}{n-i}$ (што је једнако $\binom{n}{i}$) начина бирамо i негативних бројева. Сумирањем по параметру i добијамо израз са леве стране. ■

Пример 4.7. /*Државно такмичење из математике, III разред (А кат.), Ниш 2014. год*/

За непразне подскупове A и B скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ пишемо $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ ако је сваки елемент скупа A мањи од сваког елемента скупа B. Доказати да је број парова непразних подскупова (A, B) скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ таквих да је $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ једнак $(n - 2) \cdot 2^{n-1} + 1$.

Решење:

За $n = 1$, не постоји ни један уређени пар подскупова, што је у сагласности са формулом. Размотримо случајеве када је $n > 1$.

Нека је $|A \cup B| = k$ фиксиран. Датих k елемената можемо распоредити у скупове A и B на $k-1$ начина, јер за изабрани максималан члан скупа A, јединствено одређујемо све остале његове елементе, а самим тим и елементе другог скупа (сви бројеви мањи од „максималног“ потпадају под A). Даље, почетних k елемената можемо изабрати на $\binom{n}{k}$ начина, што нам укупно даје $\binom{n}{k} \cdot (k-1)$ парова (A, B) за фиксирано k.

Сумирањем по k, које узима вредности од 2 до n, добијамо коначно решење. $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot (k-1) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot k - \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1$.

При упрошћавању прве суме користимо идентитете из *Примера 4.1* и *Примера 2.1* па добијамо $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = \sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot n = n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot (2^{n-1} - 1)$.

На сличан начин упрошћавамо и другу суму и добијамо $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$.

На крају, добијамо формулу $n(2^{n-1} - 1) - (2^n - n - 1) = (n-2)2^{n-1} + 1$. ■

4.4 Алтернирајуће суме биномних коефицијената

Дефиниција. Сума низа бројева (a_n) се назива *алтернирајућа*, ако се знак сабирака наизменично мења, тј. ако је k-ти члан збира облика $(-1)^k a_k$.

Слично претходној дефиницији, следећи примери ће се односити на понашање сума биномних коефицијената када се знак наизменично мења.

Пример 4.8. За $n > 0$, доказати да је израз $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$ једнак нули.

Нека скуп A садржи све подскупове скупа $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ са парним бројем елемената, а скуп B подскупове са непарним бројем елемената.

Сада се проблем своди на питање да ли A и B имају исти број елемената.

Проблему приступамо тако што сваком елементу из скупа A додељујемо елемент из B, тако да се сваки елемент из оба скупа искористи тачно једном.

Посматрајмо произвољан подскуп скупа $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ који има паран број елемената. Нека је то $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \in \mathrm{A}$, где је i паран. Елементе је могуће уредити, тако да можемо да захтевамо да важи $a_1 < a_2 < \cdots < a_i$.

Алгоритам по којем добијамо елемент скупа B који одговара подскупу $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ је следећи:

(1) ако је $a_1 = 1$, избацујемо га из $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$;

(2) ако је пак $a_1 > 1$, у $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ убацујемо јединицу и у ознакама свих осталих чланова индекс повећавамо за један, не би ли се сачувала уређеност.

Лако је приметити да формирани подскуп има непаран број елемената. На овај начин, рецимо, подскупу $\{2\,,4\,,5\,,7\}$ бисмо доделили $\{1, 2\,,4\,,5\,,7\}$, а одговарајући скуп подскупу $\{1, 2\,,4\,,5\}$ би био $\{2\,,4\,,5\}$.

Опишимо сада инверзно пресликавање применом описаног алгоритма на елементима скупа B. Нека је $\{a_1, a_2, \dots, a_i\} \in$ B, где је i непаран и нека важи $a_1 < a_2 < \cdots < a_i$. Ако је $a_1 = 1$, избацујемо га из скупа, па добијамо скуп $\{a_2, \dots, a_i\}$. Овај скуп има паран број елемената и то је управо скуп од којег се, применом корака (2), добија почетни скуп $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$. Ако је $a_1 > 1$, убацујемо јединицу и као горе, индекс повећавамо за један. Поново се добија скуп са парним бројем елеменета и то управо онај скуп од ког се применом корака (1) добија почетни скуп $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$.

Овим пресликавањем се, на пример, од скупа $\{1, 2\,,4\,,5\,,7\}$, добија $\{2\,,4\,,5\,,7\}$, а од $\{2\,,4\,,5\}$ скуп $\{1, 2\,,4\,,5\}$.

Дакле, поступак је повратан, па се да закључити да је број елемената скупова A и B једнак. ■

Неке од алтернирајућих сума у вези са биномним коефицијентима као резултат дају више различитих вредности, зависно од парности параметара. Ради краћег записа, уводе се нове ознаке, функције и изрази, а Кронекерова[7] δ (делта) $-$функција је једна од њих.

Дефиниција. Кронекерова δ $-$функција је функција две променљиве (n, m), у ознаци $\delta_{n,m}$, која се дефинише

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{за } n = m; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 4.9. За $m, n > 0$ доказати да важи $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{m} (-1)^i = (-1)^n \, \delta_{n,m}$.

Поново посматрамо скуп $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

У скуп A смештамо уређене парове (X, Y) за које важи (*):

а) $X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$;

б) број елемената подскупа X је паран;

в) $Y \subseteq X$;

г) број елемената скупа Y је m.

---

[7] Л. Кронекер (*Leopold Kronecker*) – немачки математичар и логичар (1823-1891)

Број елемената овако формираног скупа A је $\sum_{i \text{ парно}} \binom{n}{i}\binom{i}{m}$.

Слично дефинишемо скуп B, с тим што је број елемената подскупа X у овом случају непаран. Број елемената скупа B је $\sum_{i \text{ непарно}} \binom{n}{i}\binom{i}{m}$.

Да би наведене суме имале вредности различите од нуле, неопходно је и довољно да важи $n \geq i \geq m$. Битно је напоменути да, када је $m > n$, обе стране једнакости су нула, па је једнакост задовољена.

За $n = m$, једини члан суме који је различит од нуле је члан $\binom{n}{n}\binom{n}{n}(-1)^n = (-1)^n$. Како је за $n = m$ и $\delta_{n,m} = 1$, то је једнакост задовољена.

У случају $n > m$, потребно је показати да скупови A и B имају исти број елемената. Из израза $n > m$ и (*) закључује се да постоји бар један елемент скупа $[n]$ који не припада скупу Y. Нека је k највећи такав елемент. Ако $k \in X$, слично *Примеру 4.8*, избацујемо га из X. Ако пак $k \notin X$, убацујемо га у X. На овај начин добијамо „парњаке“ уређених парова (X, Y) који се сликају један у другог.

Овим је показано да је број елемената скупова A и B једнак, тј. да је

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{m}(-1)^i = 0.$$

Како из $n > m$ следи $n \neq m$, то важи и $(-1)^n \delta_{n,m} = 0$.

Покривши све случајеве, можемо да тврдимо да је доказ завршен. ■

5 ПАРТИЦИЈЕ И СТИРЛИНГОВИ БРОЈЕВИ

5.1 Интерпретација партиција

Замислимо одељење од 20 ученика. Сваки ученик је у обавези да као изборни предмет одабере један од пет страних језика: *немачки, француски, руски, италијански* и *шпански*. Колико различитих могућности постоје након што сваки од ученика начини свој избор ако знамо да је сваки од језика изабран најмање једном? Питање је, очигледно, еквивалентно питању: „На колико начина се скуп $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ може поделити на пет дисјунктних непразних подскупова чија је унија сам скуп $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$?“

Дефиниција. Нека су n и k природни бројеви за које важи $n \geq k$. Нека је $B = \{B_1,\ B_2, \dots, B_k\}$, где је $B_i \subseteq [n]$ за $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$, B_i су непразни и дисјунктни у паровима и $\bigcup_{i=0}^{k} B_i = [n]$. Тада кажемо да је B *партиција скупа* $[n]$ *на* k *блокова*.

Илуструјмо појам партиције на примеру.

Пример 5.1. Постоји 15 различитих партиција скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ на два блока, и то су:

- $\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$
- $\{\{2\}, \{1, 3, 4, 5\}\}$
- $\{\{3\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$
- $\{\{4\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$
- $\{\{5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$
- $\{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$
- $\{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$
- $\{\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}\}$
- $\{\{2, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$
- $\{\{2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$
- $\{\{2, 5\}, \{1, 3, 4\}\}$
- $\{\{3, 4\}, \{1, 2, 5\}\}$
- $\{\{3, 5\}, \{1, 2, 4\}\}$
- $\{\{4, 5\}, \{1, 2, 3\}\}$

Сада се питамо: „Постоји ли уопштење овог проблема? Постоји ли израз који помаже у налажењу броја партиција скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ на k блокова?“ Упознајмо се са следећим појмом.

Дефиниција. Нека су n и k природни бројеви. Тада се број партиција скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ на k блокова зове *Стирлингов*[8] *број другог реда*, у ознаци $S(n, k)$.

---

[8] Џ. Стирлинг (*James Stirling*) – шкотски математичар (1692-1770)

5.2 Запис и својства Стирлингових бројева другог реда

Из дефиниције Стирлинговог броја другог реда[9], јасно је да за $n < k$, $S(n, k) = 0$.

За потребе решавања неких проблема који су у вези са партицијама, дефинише се Стирлингов број другог реда са параметрима n и 0 који износи $S(n, 0) = 0$.

Стирлингов број другог реда се још записује у облику $\left\{ n \atop k \right\}$, што нас може подсетити на запис биномних коефицијената.

На *Слици 11* се налазе вредности $\left\{ n \atop k \right\}$ за $n, k \leq 10$.

n \ k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Слика 11. Неке вредности Стирлингових бројева другог реда

Пример 5.2. Доказати да за сваки природан број n, важи $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

$S(n, 1)$ представља број партиција скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ на један блок. Како унија свих блокова мора дати баш тај скуп, то је јасно да је сам скуп $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ једина таква партиција.

$S(n, n)$ представља број партиција скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ на n блокова. Како је неопходно да сваки од блокова буде непразан, као и да су блокови дисјунктни у паровима то је једина партиција овог скупа на n блокова $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots \{n\}\}$. ■

---

[9] Битно је споменути да у комбинаторици постоји и појам Стирлинговог броја *првог реда*; у вези је са пребројавањем пермутација са одређеним особинама, те се њиме нећемо бавити

Пример 5.3. Доказати да за сваки природан број n важи $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

По дефиницији, $S(n,2)$ представља број партиција скупа $[n]$ на 2 блока.

Са друге стране, постоји 2^n уређених парова скупова A и B, за које важи $A \cup B = [n]$, као и $A \cap B = \emptyset$, јер сваки од елемената скупа $[n]$ може припадати или скупу A или скупу B. Како се под партицијом подразумева „разбијање“ скупа на напразне подскупове, то избацујемо могућности $A = \emptyset, B = [n]$ и $A = [n], B = \emptyset$, па нам остаје укупно $2^n - 2$ уређених парова. Пошто Стирлилнгов број $S(n,2)$ броји парове блокова међу којима редослед није битан, дељењем последњег израза са 2, добија се тражена једнакост. ■

5.3 Рекурентне везе између Стирлингових бројева другог реда

ТЕОРЕМА. За природне бројеве n, k, за које је $n \geq k$, важи:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k).$$

ДОКАЗ: По дефиницији, $S(n,k)$ је број партиција скупа $[n]$ на k блокова

Десну страну једнакости добијамо дискусијом по елементу n. Дакле, ако при разбијању посматраног скупа на k блокова, $\{n\}$ представља један од блокова, онда се осталих $n-1$ елемената може распоредити у преосталих $k-1$ блокова на $S(n-1,k-1)$ начина. Ако се пак, елемент n налази у неком од блокова који није једночлан, проблем се своди на следеће: прво на $S(n-1,k)$ начина распоређујемо преосталих $n-1$ елемената у k блокова, а потом на k начина бирамо у који од блокова смештамо елемент n. Ово нам заиста коначно даје $k \cdot S(n-1,k)$ могућих начина.

Покривши оба случаја, добијамо други одговор на постављено питање: $S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$. ■

Претходно доказана формула се још назива и *троугаона рекурентна формула Стирлингових бројева другог реда*, из разлога што у самом изразу учествују три различита Стирлингова броја. У следећем примеру ћемо се позабавити доказом *вертикалне рекурентне формуле* у којој фигуришу Стирлингови бројеви константног параметра k.

ТЕОРЕМА. За природне бројеве n, k, за које је $n \geq k$ важи:

$$S(n+1,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S(n-i,k-1).$$

ДОКАЗ: Докажимо да десна страна такође представља број партиција скупа $[n]$ на k блокова.

Десну страну једнакости посматрамо на следећи начин: формирамо први блок тако да се у њему (тренутно) налази само број $n+1$. На $\binom{n}{i}$ начина можемо изабрати још i елемената који ће чинити први блок заједно са елементом $n+1$. Преосталих $n-i$ елемената распоређујемо на $S(n-i,k-1)$ начина у преосталих $k-1$ блокова, те сумирањем по i добијамо други одговор, $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}S(n-i,k-1)$.

Доказ је овим завршен. ■

Пример 5.4. Покажимо формулама тврђење из *Примера 5.1.*

$S(5,2) =$

$$\begin{aligned}
&= S(4,1) + 2\cdot S(4,2)\\
&= 1 + 2\cdot[S(3,1) + 2\cdot S(3,2)]\\
&= 1 + 2\cdot(1 + 2\cdot[S(2,1) + 2\cdot S(2,2)])\\
&= 15.
\end{aligned}$$

Пример 5.5. Применимо формулу из друге теореме за вредности $n=6$ и $k=3$, ослањајући се на податке са *Слике 11.*

$S(7,3) =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}S(6-i,2)\\
&= \binom{6}{0}S(6,2) + \binom{6}{1}S(5,2) + \binom{6}{2}S(4,2) + \binom{6}{3}S(3,2) + \binom{6}{4}S(2,2) + \binom{6}{5}S(1,2) + \binom{6}{6}S(0,2)\\
&= 301.
\end{aligned}$$

Следећа теорема није пример рекурентне формуле, али је свакако битно својство Стирлинговог броја.

ТЕОРЕМА. За свако $n,x \in N$ доказати да важи: $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x(x-1)\ldots(x-k+1)$.

Коментар: Израз $x(x-1)\ldots(x-k+1)$ још се записује и као $x_{(k)}$ и назива се *опадајући факторијел.*

ДОКАЗ: Еквивалентно питање: „На колико начина се n ученика може распоредити у x учионица, ако је дозвољено да учионице буду и празне?“

Како за сваког од ученика постоји x опција, то је први одговор на питање x^n.

Са друге стране, у зависности од k, броја искоришћених учионица, на $S(n,k)$ начина можемо распоредити ученике у k блокова. Потом, први блок ученика можемо сместити на x начина у неку од слободних учионица, други блок на $x-1$ начина, итд.

Укупно добијамо да постоји $S(n,k)x(x-1)\ldots(x-k+1)$ начина да n ученика распоредимо у тачно k учионица. Дакле, сумирањем по параметру k добија се други одговор на питање. ■

Сумирањем Стирлингових бројева по броју блокова добија се, јасно, број свих партиција неког скупа. И овај број има посебно име.

Дефиниција. Број свих партиција скупа $\{1,2,3,\ldots,n\}$ назива се *Белов*[10] *број*, у ознаци $B(n)$.

На основу *Слике 11* изведена је Табела 1 са вредностима Беловог броја за првих десет природних бројева.

$\boldsymbol{n}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\boldsymbol{B(n)}$	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

Табела 1. Вредности Беловог броја за $n \leq 10$.

Белове бројеве, попут Стирлингових, везују рекурентне формуле.

ТЕОРЕМА. Нека је $B(0)=1$. Тада за сваки природан број n важи формула

$$B(n+1)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B(i),$$

ДОКАЗ: Покажимо да обе стране једнакости броје све партиције скупа $\{1,2,3,\ldots,n+1\}$

По дефиницији, лева страна броји све партиције посматраног скупа. Са друге стране, поставимо број $n+1$ у први блок партиције. На $\binom{n}{i}$ начина можемо одабрати још i елемената скупа који **неће** припадати првом блоку. Од тих i елемената, можемо начинити $B(i)$ под-партиција, док преосталих $n-i$ елемената смештамо у први блок.

---

[10] Е. Т. Бел (*Eric Temple Bell*) – шкотски математичар (1883-1960)

Сумирањем по i покривамо све случајеве и на тај начин добијамо број свих партиција скупа $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}$ $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B(i)$.

Овде је доказ завршен. ■

5.4 Партиције бројева

Замислимо кувара, који у свом ресторану треба да исецка 50 шаргарепа за што краће време. Гости су нестрпљиви, па кувар на све начине покушава да убрза сецкање. У жељи да овај посао обави што пре, у руке узима више шаргарепа и сецка их одједном. Међутим, руке га временом све више боле, те како минути пролазе, број шаргарепа у његовој руци се смањује, тј. није у стању да сецка онолико шаргарепа колико је могао пре. На колико начина кувар може исећи ових 50 шаргарепа?

Овај проблем се дефинитивно може довести у везу са претходним проблемом партиције скупа, с тим што овде говоримо о бројевима.

Дефиниција. Ако за коначан низ природних бројева $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ важи $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ и $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, онда се такав низ назива *партицијом природног броја* n, у ознаци $p(n)$.

Пример 5.6. Број 6 има 11 различитих партиција, тј. $p(6) = 11$:

- (6)
- $(5, 1)$
- $(4, 2)$
- $(3, 3)$
- $(4, 1, 1)$
- $(3, 2, 1)$
- $(2, 2, 2)$
- $(3, 1, 1, 1)$
- $(2, 2, 1, 1)$
- $(2, 1, 1, 1, 1)$
- $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$

5.5 Ферерове фигуре и веза са партицијама природних бројева

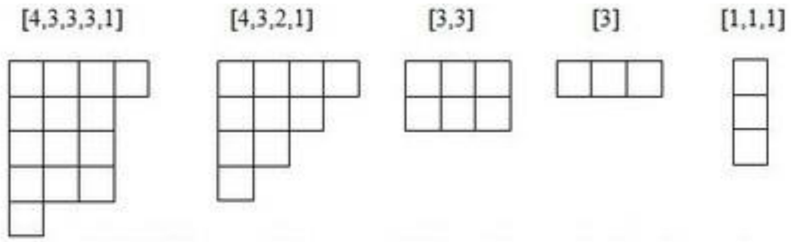
Ферерове[11] *фигуре* су једноставан, а са друге стране моћан алат при испитивању својстава партиција природних бројева. Још се називају и *Ферерови дијаграми*, *Ферерови облици* или *Ферерове табле*.

Фереровy фигуру партиције $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ чине квадрати који формирају део правоугаоне мреже, тако што први ред фигуре чини a_1 квадрата, други ред a_2 квадрата, … , k-ти ред a_k квадрата.

---

[11] Н. М. Ферер (*Norman Macleod Ferrers*) – енглески математичар (1829-1903)

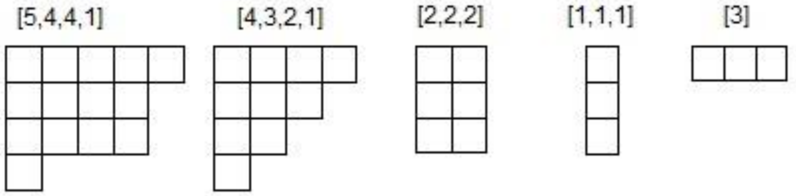
На *Слици 12.* дати су неки примери интерпретације партиција природних бројева помоћу Фererовых фигура.



Слика 12. Партиције и Ферерови облици

Једно занимљиво својство Фереровых фигура је и то да је могуће увести „пресликавање“ које ће све фигуре поделити у парове, па ће се тим пресликавањем свака од фигура сликати у свог парњака (и обрнуто), кога ћемо називати њеним *конјугатом*.

Уводимо пресликавање као осну симетрију фигуре у односу на њену главну дијагоналу. На овај начин, фигуре са *Слике 12* се сликају у своје конјугате са *Слике 13*.



Слика 13. Конјугати

Сада када знамо шта су Ферерове фигуре и у каквој су вези са својим конјугатима, можемо да погледамо пар примера који ће нам разоткрити занимљиве особине партиција.

Пример 5.7. Доказати да за све природне бројеве $n \geq k$ важи да је број партиција броја n које имају најмање k блокова једнак броју партиција броја n у којима је највећи блок бар величине k.

Партиција броја n која садржи бар k блокова одговара Фереровој фигури која има најмање k редова.

Са друге стране, партиција броја n чији је највећи блок бар величине k одговара Фереровој фигури која има најмање k колона, јер се највећи блок налази на врху фигуре и одређује број колона.

Ако све партиције из првог случаја сакупимо у један скуп, а партиције из другог случаја у други скуп, закључујемо да ако се партиција p јавља у првом скупу, онда се њен конјугат јавља у другом и обратно. Дакле, свакој партицији из првог скупа, могуће је доделити тачно једну партицију из другог скупа тако да се свака од партиција „искористи“ тачно једном. Следи да ова два скупа имају исти број елемената, па смо самим тим показали да тврђење важи.

На *Слици 14* је дат пример Фererових фигура из овог примера за $k = 4$.

Овим је доказ завршен. ■

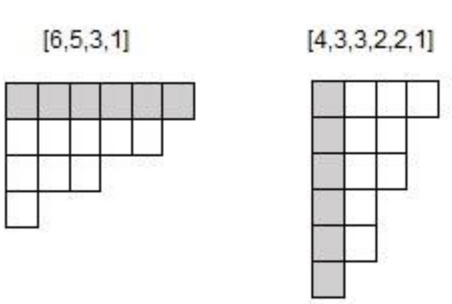
Пример 5.8. За сваки природан број n, број партиција броја n у којима су прва два блока једнака исти је као и број партиција броја n у којима је сваки блок бар величине два. Доказати.

Све партиције броја n у којима су прва два блока једнака у форми Фererових фигура имају прва два реда истих дужина.

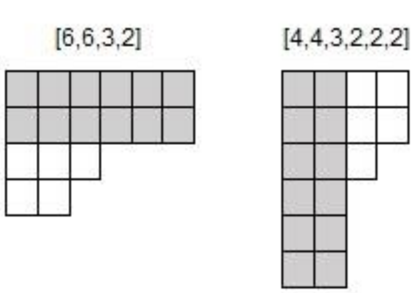
Свака партиција броја n има све „сабирке“ веће или једнаке броју 2, ако су прве две колоне у облику Фererове фигуре једнаких дужина.

Слично претходном примеру, свакој партицији из првог случаја можемо доделити њој конјуговану партицију која се налази у оквиру другог случаја искористећи сваку од партиција тачно једном при оваквом упаривању (*Слика 15*). Ово нас води до закључка да је број партиција броја n из првог случаја једнак броју партиција броја n из другог случаја.

Доказ је овим завршен. ■



Слика 14. Илустрација *Примера 5.5.*



Слика 15. Илустрација *Примера 5.6.*

6 ЗАКЉУЧАК

У овом раду обрађене су неке од најзанимљивијих тема из комбинаторике. Кроз низ теорема и примера, показано је да математички докази не морају бити строго формални, али да ипак могу задржати прецизност и конкретност. Сваки од наведених комбинаторних доказа је својствен пример креативног решавања математичког проблема. Математички језик коришћен у раду је једноставан, те га могу разумети средњошколци свих узраста.

Желео бих да се овом приликом захвалим свом ментору Др Сoњи Чукић, првенствено на помоћи при избору потребне литературе и изради рада, али и на одлично конципираним и инспиративним предавањима из предмета *Анализа с алгебром* током све четири године које сам провео у Математичкој гимназији, а због којих сам математику још више заволео.

7 ЛИТЕРАТУРА

[1] Arthur T. Benjamin, Jennifer J. Quinn, *Proofs that Really Count*, Mathematical Association of America, Washington DC, 2003

[2] Miklos Bona, *Introduction to Enumerative Combinatorics*, McGraw-Hill, New York, 2007

[3] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић, *Анализа са алгебром 2*, Круг, Београд, 2007

[4] Драган Стевановић, Мирослав Ћирић, Слободан Симић, Владимир Балтић, *Дискретна математика – Основе комбинаторике и теорије графова*, Београд, 2007

[5] Павле Младеновић, *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд, 2000

[6] en.wikipedia.org

[7] sr.wikipedia.org

[8] srb.imomath.com